

*С. Б. Макаркин, Б. Ф. Мельников, М. А. Тренина***ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ПСЕВДОГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ
ВЕРСИИ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА****Аннотация.**

Актуальность и цели. Задача коммивояжера является примером математической модели, которая, будучи созданной для одной предметной области, находит свое применение и во многих других областях. Псевдогеометрическая версия этой проблемы более адекватно описывает множество ее частных случаев, встречающихся в большинстве предметных областей, чем значительно более распространенная геометрическая версия. Цель работы: применить разработанные подходы для решения геометрической версии задачи коммивояжера для ее так называемой псевдогеометрической версии.

Материалы и методы. Для решения псевдогеометрической задачи коммивояжера рассматривается несколько случайно сгенерированных перестановок всего множества точек, и для каждой из них применяется алгоритм псевдовосстановления их расположения. Выбор единственного варианта расположения каждой точки возможен после решения оптимизационной задачи, заключающейся в повороте сгенерированного множества точек на некоторый угол и смещении на некоторый вектор.

Результат. Сформулированы различные метрики и изучены их свойства, на основании которых разработан эвристический алгоритм локального поиска.

Выводы. Применение описанных в настоящей работе метрик и эвристического алгоритма локального поиска позволило повысить эффективность геометрического метода решения псевдогеометрической задачи коммивояжера.

Ключевые слова: задача коммивояжера, геометрическая версия, псевдогеометрическая версия, геометрический подход, метрика, эвристические алгоритмы.

*S. B. Makarkin, B. F. Mel'nikov, M. A. Trenina***APPROACH TO SOLVE A PSEUDOGEOMETRIC
VERSION OF THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM****Abstract.**

Background. The traveling salesman problem is an example of a mathematical model that, being created in one subject area, finds application in many other areas. The pseudogeometric version of this problem more adequately describes a set of its private cases, encountered in most subject areas, in comparison with a more widely-used geometric version. The aim of the work is to apply the developed approaches to solve the geometric version of the traveling salesman problem for its so-called pseudogeometric version.

Materials and methods. To solve the pseudogeometric problem of traveling salesman the authors considered several randomly generated rearrangement of a set of dots, and for each one they applied the algorithm of pseudorestitution of their disposition. The choice of the only variant of disposition of each dot is possible after solution of the optimization problem, consisting in the turn of the generated set of dots through a certain angle and the shift along a certain vector.

Results. The authors formulated various metrics and studied the properties thereof, on the basis of which they have developed a heuristic algorithm of local search.

Conclusions. Applications of the metrics and the heuristic algorithm of local search, described in the paper, increased the efficiency of the geometric method of solution of the pseudogeometric problem of traveling salesman.

Key words: traveling salesman problem, geometric version, pseudogeometric version, geometric approach, metrics, heuristic algorithms.

Введение

Данную статью можно рассматривать как дополнение и обобщение статей [1, 2].

Задача коммивояжера (ЗКВ) является примером математической модели, которая, будучи созданной для одной предметной области, находит свое применение и во многих других областях. Среди множества различных версий (вариантов) задачи коммивояжера одной из наиболее изученных является *геометрическая* (именуемая также *Евклидовой* [1, 3, 4]). В ней стоимость маршрута равна расстоянию между точками на плоскости, вычисляемому как Евклидова метрика. В результате многолетних исследований для решения ее частных случаев было разработано множество подходов. Однако за пределами геометрической версии алгоритмы, соответствующие этим подходам, обычно неприемлемы. При этом так называемая *псевдогеометрическая* версия ЗКВ [4–6] более адекватно описывает множество частных случаев ЗКВ, встречающихся в большинстве предметных областей [7].

В псевдогеометрической версии ЗКВ в качестве функции стоимости используется следующая:

$$c(\{u, v\}) = \begin{cases} k_j i \sqrt{\sum_i (u_i - v_i)^2}, & k_j > 0, \\ 0, & k_j \leq 0, \end{cases}$$

где u_i, v_i – i -я компонента вектора, задающего координаты точки u и v соответственно; k_j – j -я компонента нормально распределенного случайного вектора $K = \{k_1, \dots, k_n\} : k_i \in \mathbb{R}, n = |E|$ с $\mu = 1$.

Такое вычисление функции расстояния дает возможность нарушения неравенства треугольника, что является важным отличием псевдогеометрического варианта ЗКВ от геометрического.

Поэтому основные исследования авторов данной статьи направлены на разработку алгоритмов решения псевдогеометрической версии ЗКВ.

1. Геометрический подход – псевдооптимальное размещение точек

Как мы уже говорили, одной из наиболее изученных является геометрическая версия ЗКВ; в результате теоретических исследований было разработано множество подходов к решению ее частных случаев [8]. Среди них можно выделить так называемые геометрические подходы, использующие при поиске решения информацию о том, что координаты городов были получены как частный случай геометрической ЗКВ. В качестве примеров алгоритмов, относящихся к группе таких геометрических подходов, можно привести луковичный (onion-peeling) алгоритм [9], а также алгоритм эластичной сети [10]. Имея небольшую вычислительную сложность, эти подходы позво-

ляют получить достаточно хорошее решение. Несмотря на то, что применение подобных алгоритмов к псевдогеометрической задаче напрямую невозможно (матрица расстояний псевдогеометрического частного случая, вообще говоря, не соответствует расстояниям между городами, рассчитываемым на основании координат городов), мы, однако, пытаемся решить задачу расположения городов практически теми же способами, которые применяются для геометрического варианта: решая оптимизационную задачу минимизации невязки:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left| c(u_i, u_j) - \tilde{c}(u_i, u_j) \right|,$$

где u_i ($i = 1, \dots, n$) – точки; ниже координаты i -й точки будем обозначать (x_i, y_i) ; $c(u_i, u_j)$ – (i, j) -й элемент исходной матрицы расстояний; $\tilde{c}(u_i, u_j)$ – (i, j) -й элемент полученной матрицы расстояний.

Для этого так называемого псевдовосстановления координат исходного множества точек был разработан эвристический алгоритм [1]. С целью его оптимизации авторы внести некоторые изменения:

Алгоритм 1 (алгоритм псевдооптимального размещения точек)

• *Вход.* Матрица $c: E \rightarrow \mathbb{N}_0$ (матрица весов ребер полного взвешенного графа [11] с вершинами $V = \{u_1, \dots, u_n\}$), некоторое число $N \in \mathbb{N}$.

• *Шаг 1.* $x_1 := 0$; $y_1 := 0$; $x_2 := 0$; $y_2 := c(u_1, u_2)$.

• *Шаг 2.* Для каждой точки $k = 3, \dots, n$ вычислить координаты (x_k, y_k) путем выполнения описанных далее шагов 3–7.

• *Шаг 3.* $M := \min\left(\frac{(k-1)(k-2)}{2}, N\right)$.

• *Шаг 4.* Для каждого значения $l = 1, \dots, M$ выполнить описанные далее шаги 5 и 6.

• *Шаг 5.* Случайно выбрать равномерно распределенные значения $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, причем $i \neq j$. Будем i -ю точку называть также v , а j -ю – w , и, кроме того, обозначать $c_1 = c(u, v)$, $c_2 = c(u, w)$.

• *Шаг 6.* Если $c_1 + c_2 < c(v, w)$ (т.е. для точек u , v и w нарушается неравенство треугольника), то выбираем

$$x_u = \frac{c_1 x_w + c_2 x_v}{c_1 + c_2},$$

$$y_u = \frac{c_1 y_w + c_2 y_v}{c_1 + c_2}$$

(в вырожденной ситуации, т.е. когда одновременно $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, берем точку посередине отрезка $[v, w]$), т.е. выбираем координаты между i -й и j -й точками пропорционально значениям соответствующих элементов матрицы стоимостей).

В противном случае (т.е. при $c_1 + c_2 > c(v, w)$):

— вычисляем два варианта пар x_k и y_k согласно системе

$$\begin{cases} (x - x_v)^2 + (y - y_v)^2 = (c(u, v))^2, \\ (x - x_w)^2 + (y - y_w)^2 = (c(u, w))^2; \end{cases}$$

— если $k = 3$, то выбираем произвольную пару координат, иначе выбираем пару по одной случайно выбранной точке среди точек с номерами $1, \dots, k-1$, отличными от i и j ;

— выбранную пару координат добавляем в коллекцию пар.

• *Шаг 7.* Вычисляем окончательные значения x_k и y_k как средние арифметические значений l соответствующих координат сформированной коллекции.

• *Выход.* Координаты $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

После выполнения этой операции применяются описанные выше методы решения геометрического варианта ЗКВ.

2. Метрика псевдооптимального размещения точек и ее свойства

Очевидно, что при восстановлении координат городов на основании матрицы расстояний рассчитанные координаты каждого города зависят от выбранной последовательности предыдущих городов. Далее наша задача состоит в выборе для каждой точки единственного варианта расположения, а в данной ситуации любые усреднения бессмысленны. Усреднения возможны только после решения оптимизационной задачи, заключающейся в повороте сгенерированного множества точек на некоторый угол и смещения на некоторый вектор. Для решения этой задачи введем метрику и исследуем ее свойства, что и является основным предметом данной статьи.

Так как для n городов возможно определить $n!$ различных последовательностей этих городов, на основании одной матрицы расстояний мы можем получить $n!$ различных размещений. С помощью поворота и параллельного переноса мы можем максимально приблизить одну расстановку к другой без изменения матрицы расстояний. Таким образом, для повышения точности восстановления координат возможно усреднение координат городов нескольких размещений.

После применения алгоритма 1 мы получаем размещение точек для данной ЗКВ, которую назовем псевдорасстановкой. После многократного применения алгоритма 1 мы можем рассматривать множество таких псевдорасстановок. Пусть X – множество всех возможных псевдорасстановок для данного частного случая псевдогеометрической версии ЗКВ. С помощью поворота на угол φ и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ мы можем максимально приблизить (т.е. максимально уменьшить расстояние) одну псевдорасстановку к другой, не изменяя матрицы расстояний. Для каждой пары $(\varphi, \vec{a})$ вычислим расстояние между псевдорасстановками $x^i = \{(x_1^i, y_1^i), \dots, (x_n^i, y_n^i)\}$ и

$x^j = \{(x_1^j, y_1^j), \dots, (x_n^j, y_n^j)\}$ по формуле

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2}.$$

Рассмотрим всевозможные пары $(\varphi, \vec{a})$ и для всех вычисленных значений r_{ij} выберем минимальное. Таким образом, для любых двух псевдорасстановок x^i и x^j введем следующую функцию:

$$d(x^i, x^j) = \min_{(\varphi, \vec{a})} r_{ij} = \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \right\}. \quad (1)$$

Покажем, что функция (1) удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Первые две аксиомы очевидно выполняются. Для доказательства неравенства треугольника рассмотрим неравенства:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{(x_k^i - x_k^l)^2 + (y_k^i - y_k^l)^2} + \sqrt{(x_k^l - x_k^j)^2 + (y_k^l - y_k^j)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $k = 1, \dots, n$.

Полагая $x_k^i - x_k^l = a_1$, $y_k^i - y_k^l = a_2$, $x_k^l - x_k^j = b_1$, $y_k^l - y_k^j = b_2$, получим соотношение

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

которое следует из неравенства Коши – Буняковского:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Просуммируем неравенства (2) по k от 1 до n

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^l)^2 + (y_k^i - y_k^l)^2} + \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^l - x_k^j)^2 + (y_k^l - y_k^j)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Неравенство (3) не зависит от пар $(\varphi, \vec{a})$ и выполняется для любых таких пар, следовательно, оно выполняется и для таких пар, при которых эти суммы минимизируются. Следовательно

$$\begin{aligned} & \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^j)^2 + (y_k^i - y_k^j)^2} \right\} \leq \\ & \leq \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^l)^2 + (y_k^i - y_k^l)^2} \right\} + \\ & + \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{r=1}^n \sqrt{(x_k^l - x_k^j)^2 + (y_k^l - y_k^j)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Итак, введенная функция удовлетворяет всем аксиомам метрики, следовательно, (X, d) – метрическое пространство.

Проанализируем, какими свойствами обладает метрика d и метрическое пространство (X, d) . Для этого будем использовать определения: ограниченного множества, предела последовательности, фундаментальной последовательности и полного пространства согласно [12].

Любая последовательность расстановок $\{x_m\}$ данного метрического пространства является ограниченной, действительно, выберем в качестве центра шара a первый член последовательности x_1 , тогда в силу того, что эти расстановки получены для одной псевдогеометрической ЗКВ, выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^i - x_k^1)^2 + (y_k^i - y_k^1)^2} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1) - \min_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1) - \min_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1)}{2} \right)^2} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^n \frac{\max_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1) - \min_{1 \leq i \leq n} c(u_i, u_1)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

а расстояние между псевдорасстановками после преобразования $(\varphi, \vec{a})$ значительно уменьшится. Таким образом, существует число r такое, что $\rho(x_n, x_1) < r$, и все члены последовательности принадлежат шару $B(x_1, r)$.

Теорема 1. Пространство (X, d) полное.

Доказательство. Пусть последовательность псевдорасстановок $\{x_m\}$ фундаментальная, т.е. она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K_ε , начиная с которого для любых номеров p и m выполняется неравенство $\rho(x_p, x_m) < \varepsilon$,

$$\min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^p - x_k^m)^2 + (y_k^p - y_k^m)^2} \right\},$$

т.е. существует такая пара $(\varphi, \vec{a})$, для которой

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^p - x_k^m)^2 + (y_k^p - y_k^m)^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{(x_k^p - x_k^m)^2 + (y_k^p - y_k^m)^2} < \varepsilon,$$

$$|x_k^p - x_k^m| < \varepsilon, |y_k^p - y_k^m| < \varepsilon. \quad (4)$$

При этом выше было сказано, что любая последовательность в этом метрическом пространстве ограничена, а из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = a$, $a = \{(x_1^a, y_1^a), \dots, (x_n^a, y_n^a)\}$. Покажем, что и данная последовательность $\{x_m\}$ имеет предел, равный a .

Исходя из определения предела, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε , начиная с которого для любого номера m_k выполняется неравенство $\rho(a, x_{m_k}) < \varepsilon$,

$$\min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^a - x_k^{m_k})^2 + (y_k^a - y_k^{m_k})^2} \right\} < \varepsilon,$$

т.е. существует такая пара $(\varphi, \vec{a})$, для которой

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^a - x_k^{m_k})^2 + (y_k^a - y_k^{m_k})^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{(x_k^a - x_k^{m_k})^2 + (y_k^a - y_k^{m_k})^2} < \varepsilon,$$

$$|x_k^a - x_k^{(m_k)}| < \varepsilon, |y_k^a - y_k^{(m_k)}| < \varepsilon. \quad (5)$$

При $L = \max\{K_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ для любого номера $m > L$ неравенства (4) и (5) выполняются одновременно и мы получаем

$$|x_k^m - x_k^a| = |x_k^m - x_k^{m_k} + x_k^{m_k} - x_k^a| \leq |x_k^m - x_k^{m_k}| + |x_k^{m_k} - x_k^a| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}n} + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}n} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}n},$$

при всех $k = 1, \dots, n$.

Аналогично, $|y_k^m - y_k^a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}n}$. Следовательно

$$\sqrt{(x_k^m - x_k^a)^2 + (y_k^m - y_k^a)^2} < \frac{\varepsilon}{n}, \text{ при всех } k = 1, \dots, n.$$

Просуммируем неравенства по k от 1 до n

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^m - x_k^a)^2 + (y_k^m - y_k^a)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min_{(\varphi, \vec{a})} \left\{ \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k^m - x_k^a)^2 + (y_k^m - y_k^a)^2} \right\} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_m = a.$$

Значит, любая фундаментальная последовательность имеет предел, и пространство (X, d) полное. Теорема доказана.

Теорема 2. Пространство (X, d) компактно.

Доказательство. Нами уже было доказано, что любая последовательность ограничена, и в силу этого из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Исходя из теоремы о том, что метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности точек можно выделить сходящуюся подпоследовательность, получаем, что теорема доказана.

Выявленные свойства метрики позволяют нам оптимизировать алгоритм 1.

3. Эвристический алгоритм локального поиска

Компактность метрического пространства (X, d) говорит о сходимости последовательной оптимизации размещения точек и, следовательно, возможности последовательного улучшения полученного решения ЗКВ. На основании этого получим следующий эвристический алгоритм.

Алгоритм 2

- *Вход.* Взвешенный полный [11] граф (G, c) , где $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, а также функция $c: E \rightarrow \mathbb{N}$.
- *Шаг 1.* Применим алгоритм 1 для нахождения псевдооптимального размещения X_0 .
- *Шаг 2.* На основе размещения X_0 найдем решение ЗКВ, используя луковичный алгоритм (onion peeling, [8]). Будем считать это решение S_0 текущим псевдооптимальным.
- *Шаг 3.* С помощью алгоритма 1 получим k размещений $(X_1, \dots, X_k)$, используя различный случайный порядок точек.
- *Шаг 4.* Выберем из $(X_1, \dots, X_k)$ размещение X_i с минимальным расстоянием от X_0 , в качестве функции расстояния используем (3).
- *Шаг 5.* На основе размещения X_i найдем решение ЗКВ, используя луковичный алгоритм; если $\text{cost}(X_0) > \text{cost}(X_i)$, примем за оптимальное решение X_i , иначе говоря, $X_0 = X_i$.
- *Шаг 6.* Повторим m раз шаги 3–5.
- *Выход.* Псевдооптимальное решение ЗКВ $X_0 = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1})$, $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}, v_{i_1} \in V$, $i_1, i_2, \dots, i_n \in [0 \dots n]$.

4. Метрика на преобразованной матрице расстояний и ее свойства

Рассмотрим еще одну возможность введения метрики. Для каждого псевдоразмещения точек данной псевдогеометрической ЗКВ запишем преоб-

разованную матрицу расстояний, в результате чего получим множество M всевозможных матриц расстояний геометрической версии данной псевдогеометрической ЗКВ. Для любых двух матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$ определим функцию

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - b_{ij}|.$$

Данная функция очевидным образом удовлетворяет первым двум аксиомам метрики. Проверим выполнение неравенства треугольника:

$$|a_{ij} - b_{ij}| = |a_{ij} - c_{ij} + c_{ij} - b_{ij}| \leq |a_{ij} - c_{ij}| + |c_{ij} - b_{ij}|, \quad \forall i, j.$$

Просуммируем эти неравенства по i и j :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - b_{ij}| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - c_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |c_{ij} - b_{ij}| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B). \end{aligned}$$

Таким образом, функция

$$\rho(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij} - b_{ij}|$$

удовлетворяет всем аксиомам метрики, (M, ρ) – метрическое пространство.

Так как алгоритм псевдоразмещения точек разрабатывался исходя из минимизации невязки $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |c(u_i, u_j) - \tilde{c}(u_i, u_j)|$, то найдется некоторое число δ такое, что

$$|c(u_i, u_j) - \tilde{c}(u_i, u_j)| < \delta, \quad \text{для } \forall i, j,$$

тогда

$$\begin{aligned} |a_{ij} - b_{ij}| &\leq |a_{ij} - c(u_i, u_j) + c(u_i, u_j) - b_{ij}| \leq \\ &\leq |a_{ij} - c(u_i, u_j)| + |c(u_i, u_j) - b_{ij}| \leq 2\delta. \end{aligned}$$

Следовательно, $\rho(A, B) \leq n^2 \delta / 2$ для любых элементов A и B .

На основании выполнения данного неравенства мы можем сделать вывод о том, что любая последовательность в метрическом пространстве (M, ρ) ограничена и из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Поэтому для пространства (M, ρ) аналогично выполняется теорема 3.

Теорема 3. Пространство (M, ρ) компактное.

Теорема 4. Пространство (M, ρ) полное.

Доказательство. Пусть последовательность матриц $\{A_m\}$ фундаментальная, т.е. она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K_ε , начиная с которого для любых номеров p и m выполняется неравенство $\rho(A_p, A_m) < \varepsilon$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^p - a_{ij}^m| < \varepsilon. \quad (6)$$

Любая последовательность в этом метрическом пространстве ограничена, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{A_{m_k}\}$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{m_k} = C$, $C = \|c_{ij}\|$. Покажем, что и данная последовательность $\{A_m\}$ имеет предел, равный C .

Исходя из определения предела получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε , начиная с которого для любого номера m_k выполняется неравенство $\rho(A_{m_k}, C) < \varepsilon$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^{m_k} - c_{ij}| < \varepsilon \Rightarrow |a_{ij}^{(m_k)} - c_{ij}| < \varepsilon. \quad (7)$$

При $L = \max\{K_\varepsilon, N_\varepsilon\}$ для любого номера $m > L$ неравенства (6) и (7) выполняются одновременно, и мы получаем

$$\begin{aligned} |a_{ij}^m - c_{ij}| &= |a_{ij}^m - a_{ij}^{m_k} + a_{ij}^{m_k} - c_{ij}| \leq |a_{ij}^m - a_{ij}^{m_k}| + |a_{ij}^{m_k} - c_{ij}| < \\ < \frac{\varepsilon}{n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2} = \frac{2\varepsilon}{n^2}, \text{ при всех } i = 1, \dots, n, j = i + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Просуммируем неравенства по i и j :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}^p - a_{ij}^m| < \frac{n^2}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{n^2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = C.$$

Значит, любая фундаментальная последовательность имеет предел и пространство (M, ρ) полное. Теорема доказана.

Заключение

Для оценки эффективности предложенного подхода был проведен численный эксперимент, в ходе которого предложенный алгоритм 2 сравнивался с алгоритмом, описанным в [1] (по сути, предложенный в настоящей работе алгоритм является расширением данного алгоритма). В ходе данного эксперимента 50 случайно сгенерированных частных случаев псевдогеометри-

ческой ЗКВ ($n = 50$, $\mu = 1$, $\sigma = 0,03$) решались с помощью вышеуказанных алгоритмов и сравнивалось качество найденных решений (т.е. длина маршрута). Как видно из полученных данных, приведенных на рис. 1, разработанный авторами алгоритм во всех случаях показал лучший результат. Таким образом, применение описанных в настоящей работе метрик позволило повысить эффективность геометрического метода решения псевдогеометрической ЗКВ.

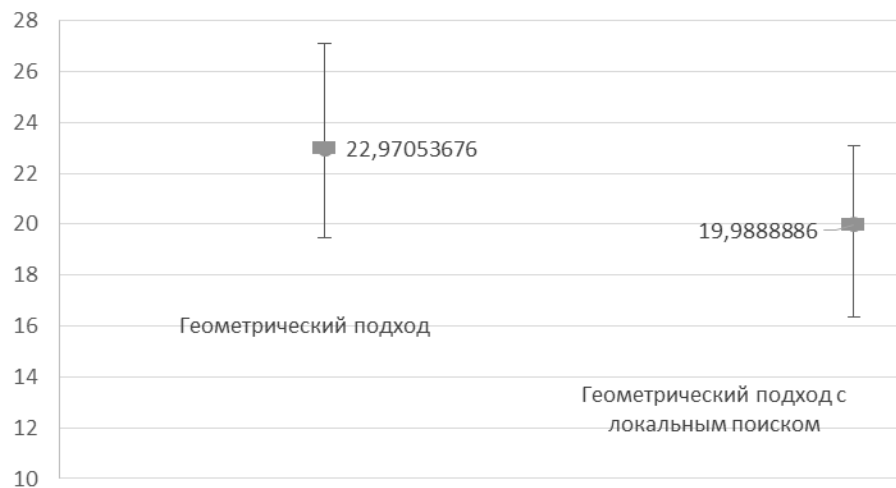


Рис. 1. Результаты численного эксперимента

На рис. 1 по оси Y – длина маршрута, каждый из отрезков обобщает результаты работы соответствующего алгоритма для 50 частных случаев: верхняя и нижняя границы отрезков – максимальная и минимальная длина маршрута, полученная с помощью соответствующего алгоритма, прямоугольная отметка на отрезке – средняя длина пути.

Список литературы

1. **Макаркин, С. Б.** Геометрические методы решения псевдогеометрической версии задачи коммивояжера / С. Б. Макаркин, Б. Ф. Мельников // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2013. – Т. 9, № 2. – С. 54–72.
2. **Макаркин, С. Б.** Применение проблемно ориентированных метрик в геометрических алгоритмах решения псевдогеометрической версии задачи коммивояжера / С. Б. Макаркин, Б. Ф. Мельников, М. А. Тренина // Стохастическая оптимизация в информатике. – 2014. – Т. 10, вып. 1. – С. 63–71.
3. **Hromkovic, J.** Algorithmics for Hard Problems. Introduction to Combinatorial Optimization, Randomization, Approximation, and Heuristics / J. Hromkovic. – Springer, 2003. – 538 p.
4. **Melnikov, B.** Some special heuristics for discrete optimization problems / B. Melnikov, A. Radionov, V. Gumayunov // Proc. of 8th International Conference on Enterprise Information Systems, ICEIS-2006. – P. 360–364.
5. **Мельников, Б.** Еще раз об эвристиках для задачи коммивояжера / Б. Мельников, Н. Романов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. – 2001. – № 4. – С. 81–92.
6. **Melnikov, B.** Multiheuristic approach to discrete optimization problems / B. Melnikov // Cybernetics and Systems Analysis. – 2006. – Vol. 42, № 3 (Sept.). – P. 335–341.

7. **Мельников, Б. Ф.** Кластеризация ситуаций в алгоритмах реального времени для задач дискретной оптимизации / Б. Ф. Мельников, Е. А. Мельникова // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – № 2 (28). – С. 16–20.
8. The Traveling Salesman problem / G. Gutin, A. Punnen (editors). – Kluwer Academic Publishers, 2002.
9. URL: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1204/1204.2350.pdf> – Liew Sing. Introducing convex layers to the Traveling Salesman Problem / Preprint: arXiv: 1204.2348. – 2012. – Режим доступа – свободный. (Access mode – free.)
10. **Somhom, S.** Competition-based neural network for the multiple travelling salesmen problem with minimax objective / S. Somhom, A. Modares, T. Enkawa // Computers & Operations Research. – 1999. – Vol. 26, №. 4. – P. 395–407.
11. **Громкович, Ю.** Теоретическая информатика. Введение в теорию автоматов, теорию вычислимости, теорию сложности, теорию алгоритмов, рандомизацию, теорию связи и криптографию : пер. с нем. / Ю. Громкович. – СПб. : БХВ-Петербург, 2010. – 326 с.
12. **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин ; МГУ им. М. В. Ломоносова. – Изд. 7-е. – М. : Физматлит, 2004. – 570 с.

References

1. Makarkin S. B., Mel'nikov B. F. *Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike* [Stochastic optimization in informatics]. 2013, vol. 9, no. 2, pp. 54–72.
2. Makarkin S. B., Mel'nikov B. F., Trenina M. A. *Stokhasticheskaya optimizatsiya v informatike* [Stochastic optimization in informatics]. 2014, vol. 10, iss. 1, pp. 63–71.
3. Hromkovic J. *Algorithmics for Hard Problems. Introduction to Combinatorial Optimization, Randomization, Approximation, and Heuristics*. Springer, 2003, 538 p.
4. Melnikov B., Radionov A., Gumayunov V. *Proc. of 8th International Conference on Enterprise Information Systems, ICEIS-2006*. P. 360–364.
5. Mel'nikov B., Romanov N. *Teoreticheskie problemy informatiki i ee prilozheniy* [Theoretical problems of informatics and its applications]. 2001, no. 4, pp. 81–92.
6. Melnikov B. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006, vol. 42, no. 3 (Sept.), pp. 335–341.
7. Mel'nikov B. F., Mel'nikova E. A. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control systems and information technologies]. 2007, no. 2 (28), pp. 16–20.
8. *The Traveling Salesman problem*. G. Gutin, A. Punnen (editors). Kluwer Academic Publishers, 2002.
9. Available at: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1204/1204.2350.pdf> – Liew Sing. Introducing convex layers to the Traveling Salesman Problem. Preprint: arXiv: 1204.2348. 2012. (Access mode – free.)
10. Somhom S., Modares A., Enkawa T. *Computers & Operations Research*. 1999, vol. 26, no. 4, pp. 395–407.
11. Gromkovich Yu. *Teoreticheskaya informatika. Vvedenie v teoriyu avtomatov, teoriyu vychislivosti, teoriyu slozhnosti, teoriyu algoritmov, randomizatsiyu, teoriyu svyazi i kriptografiyu: per. s nem.* [Theoretical informatics. Introduction into the theory of automata, theory of computability, theory of algorithms, randomization, theory of communication cryptography: translation from German]. Saint-Petersburg: BKhV-Peterburg, 2010, 326 p.
12. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of functional analysis and the theory of functions]. 7th ed. Moscow: Fizmatlit, 2004, 570 p.

Макаркин Сергей Борисович

доцент, кафедра
прикладной математики и информатики,
Тольяттинский государственный
университет (Россия, г. Тольятти,
ул. Белорусская, 14)

E-mail: s.makarkin@gmail.com

Makarkin Sergey Borisovich

Associate professor, sub-department
of applied mathematics and informatics,
Togliatti State University (14 Belorusskaya
street, Togliatti, Russia)

Мельников Борис Феликсович

доктор физико-математических наук,
профессор, кафедра прикладной
математики и информатики,
Тольяттинский государственный
университет (Россия, г. Тольятти,
ул. Белорусская, 14)

E-mail: barmaley62@yandex.ru

Mel'nikov Boris Feliksovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, sub-department
of applied mathematics and informatics,
Togliatti State University (14 Belorusskaya
street, Togliatti, Russia)

Тренина Марина Анатольевна

старший преподаватель, кафедра
прикладной математики и информатики,
Тольяттинский государственный
университет (Россия, г. Тольятти,
ул. Белорусская, 14)

E-mail: trenina.m.a@gmail.com

Trenina Marina Anatol'evna

Senior lecturer, sub-department of applied
mathematics and informatics, Togliatti
State University (14 Belorusskaya street,
Togliatti, Russia)

УДК 004.23

Макаркин, С. Б.

Подход к решению псевдогеометрической версии задачи коммивояжера /
С. Б. Макаркин, Б. Ф. Мельников, М. А. Тренина // Известия высших учебных
заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. –
№ 2 (34). – С. 135–147.